1/12/2016

Πρόταση: $\forall p$ η απεικόνιση Weigarten $L_p: T_pS \to T_pS$ είναι αυτό-προσαρτημένος γραμμ. μετασχηματισμός δηλ. $\forall w_1, w_2 \in T_pS$ $\langle L_p w_1, w_2\rangle =$
$= \langle w_1, L_p w_2\rangle$.

Απόδειξη:

Έστω $X: U \to S$ σύστημα συντ/νων με παραμέτρους $(u,v) \in U$ και $p \in X(U)$, $p = X(q)$, $\{X_u(q), X_v(q)\}$ βάση του T_pS

Αρκεί νδο $\langle LX_u, X_v\rangle = \langle X_u, LX_v\rangle$

$LX_u = -dN(X_u) = -(N\circ X)_u = -N_u$ ↗ συντομογραφία

$LX_v = -dN(X_v) = -(N\circ X)_v = -N_v$

$\langle LX_u, X_v\rangle = -\langle N_u, N_v\rangle = -\{\cancelto{0}{(\langle N, X_v\rangle)_u} - \langle N, X_{uv}\rangle\} =$

$\Rightarrow \boxed{\langle LX_u, X_v\rangle = \langle N, X_{uv}\rangle}$

$\langle X_u, LX_v\rangle = -\langle X_u, N_v\rangle = -\{\cancelto{0}{\langle X_u, N\rangle_v} - \langle X_{vu}, N\rangle\}$

$\Rightarrow \boxed{\langle X_u, LX_v\rangle = \langle X_{uv}, N\rangle}$

ΔΕΥΤΕΡΗ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΜΟΡΦΗ:

$\forall$ δχ με εσωτερικό γινόμενο και $A: V \to V$ είναι αυτοπροσ. γραμ. μετασχ τότε η $B_A: V\times V \to \mathbb{R}$, $B_A(x,y) = \langle Ax, y\rangle$ είναι συμμετρική διγραμμ. μορφή με αντίστοιχη τετραγωνική μορφή $Q_A: V \to \mathbb{R}$ $Q_A(x) = B_A(x,x) = \langle Ax, x\rangle$.

Ορισμός: Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Weigarten $L_p: T_pS \to T_pS$ $p\in S$. Ονομάζουμε δεύτερη θεμελιώδη μορφή της S στο $p\in S$ την τετραγωνική μορφή $\mathrm{II}_p: T_pS \to \mathbb{R}$, $\mathrm{II}_p(w) = \langle L_p w, w\rangle$, $w \in T_pS$.

παραδείγματα:

① Επίπεδο: $\mathrm{II}_p = 0$

② Κύλινδρος: $S: x^2 + y^2 = r^2$, $N(x,y,z) = -\frac{1}{r}(x,y,0)$

$L_p w = L_p(w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{r}(w_1, w_2, 0)$

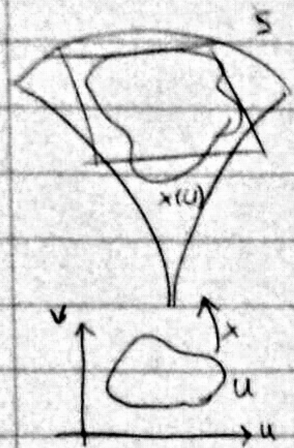
$\mathrm{II}_p(w) = \langle L_p w, w\rangle = \langle \frac{1}{r}(w_1, w_2, 0), (w_1, w_2, w_3)\rangle = \frac{1}{r}(w_1^2 + w_2^2)$

② Σφαιρα: S^2_R $\quad N(x,y,z) = -\frac{1}{R}(x,y,z)$

$L_p(w) = \frac{1}{R} w$

$II_p(w) = \langle L_p w, w\rangle = \langle \frac{1}{R} w, w\rangle = \frac{1}{R}\|w\|^2 = \frac{1}{R} I_p(w)$

$\Rightarrow \boxed{II_p = \frac{1}{R} I_p}$



Εστω $X: U \to S$ συστ. συντ/νων $\{X_u, X_v\}$ βαση του εφαπτ. επιπεδου.

Ο πινακας της II ως προς αυτη τη βαση ειναι:

$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ $\quad e = II(X_u)$

$f = \langle L X_u, X_v\rangle = \langle X_{uv}, N\rangle$

$g = II(X_v)$

$e = II(X_u) = \langle L X_u, X_u\rangle = -\langle dN(X_u), X_u\rangle = -\langle N_u, X_u\rangle =$

$= -\{\cancelto{0}{\langle N, X_u\rangle_u} - \langle N, X_{uu}\rangle\} = \langle N, X_{uu}\rangle$

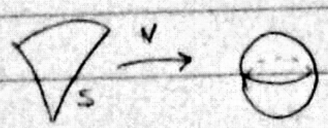
→ Οι λειες συναρτησεις $e, f, g: U \to \mathbb{R}$ καλουνται θεμελιωδη ποσα 2ας ταξης.

$w \in T_pS \Rightarrow w = aX_u + bX_v$

$II_p(w) = \langle L_p w, w\rangle = a^2\langle L_p X_u, X_u\rangle + 2ab\langle L X_u, X_v\rangle + b^2\langle L X_v, X_v\rangle$

$= a^2 II_p(X_u) + 2ab\langle L X_u, X_v\rangle + b^2 II_p(X_v) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{II_p(w) = ea^2 + 2fab + gb^2}$

-  απεικονιση Gauß

- $L_p: T_pS \to T_pS$, $L_p = -dN_p$ απεικονιση Weigarten.
- $II_p(w) = II_p(aX_u, bX_v) = ea^2 + 2fab + gb^2$ δευτερη θεμελιωδης μορφη.
- $I_p: T_pS \to \mathbb{R}$, $I_p(w) = \|w\|^2 = \langle w, w\rangle_p$ πρωτη θεμελιωδης μορφη.

$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ $\quad E = \|X_u\|^2 \quad G = \|X_v\|^2$

$F = \langle X_u, X_v\rangle \quad I_p(w) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2$

Καθετη καμπυλοτητα:

Ορισμος: Εστω S κανονικη επιφανεια, $p\in S$, $w\in T_pS$, $w\neq 0$. Ο αριθμος $K_n(w)=\dfrac{II_p(w)}{I_p(w)}$ καλειται καθετη καμπυλοτητα της S στο p στη διευθυνση w.

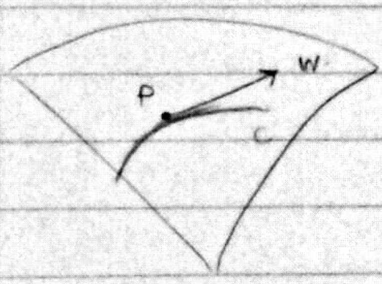
Υπολογισμος: $K_n(w)=K_n(aX_u+bX_v)=\dfrac{ea^2+2fab+gb^2}{Ea^2+2Fab+Gb^2}$

$K_n(X_u)=\dfrac{e}{E}$ $\quad K_n(X_v)=\dfrac{g}{G}$.

$\lambda\neq 0$. $K_n(\lambda w)=\dfrac{II_p(\lambda w)}{I_p(\lambda w)}=\dfrac{\lambda^2 II_p(w)}{\lambda^2 I_p(w)}=K_n(w)$.

$\boxed{\text{Αν } \|w\|=1 \Rightarrow K_n(w)=II_p(w)}$

Ισχυει:
$\langle (N\circ c)'(s), c'(s)\rangle = (\langle (N\circ c)(s), c'(s)\rangle)' - \langle N\circ c(s), c''(s)\rangle$



• $\|w\|=1$

$K_n(w)=II_p(w)=\langle L_p w, w\rangle$

Εστω $c:(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ με $c(0)=p$, $c'(0)=w$

Η c εχει παραμετρο το μηκος τοξου. $k(0)>0$

$K_n(w)=-\langle (N\circ c)'(0), c'(0)\rangle = \langle N\circ c(0), \ddot{c}(0)\rangle = \langle N(p), k(0)\vec{n}(0)\rangle$

$\Rightarrow K_n(w)=k(0)\langle N(p), \vec{n}(0)\rangle$

$\boxed{K_n(w)=k(0)\cos\theta}$, $\theta=\angle(N(p),\vec{n}(0))$

Κυριες καμπυλοτητες:

Ορισμος: Εστω κανονικη επιφανεια και $p\in S$. Οι αριθμοι:
$k_1(p)=\max\{K_n(w)/w\in T_pS, \|w\|=1\}$ & $k_2(p)=\min\{K_n(w)/w\in T_pS, \|w\|=1\}$
καλουνται κυριες καμπυλοτητες της S στο p.

Παραδείγματα:

① Επίπεδο: $k_1(p) = k_2(p) = 0$ διότι

$$k_n(w) = II_p(w) = 0 \quad \forall w \in T_p\Pi, \ \|w\| = 1.$$

② Σφαίρα: $II_p(w) = \frac{1}{R} I_p(w)$

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)} = \frac{1}{R} \Rightarrow \boxed{k_1 = k_2 = \frac{1}{R}}$$

③ Κύλινδρος: $II_p(w) = II_p(w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{r}(w_1^2 + w_2^2)$.

$$k_n(w) = \frac{1}{r}(w_1^2 + w_2^2) \qquad w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1.$$

$$\frac{1}{r} \geq k_n(w) = \frac{1}{r}(1 - w_3^2) \geq 0$$

$$\boxed{k_1(p) = \frac{1}{r}, \ k_2(p) = 0}$$